

RÓWNANIA, NIERÓWNOŚCI, UKŁADY RÓWNAŃ

1

~~Zadanie 20. (1 pkt)~~

Która z liczb jest rozwiązaniem równania $2(x-1)+x=x-3(2-3x)$?

- A. $\frac{8}{11}$ B. $-\frac{4}{11}$ C. $\frac{4}{7}$ D. -1

2

Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} y-x-1=0 \\ x+y-3=0 \end{cases}$ jest

- A. $x=1$ i $y=2$ B. $x=1$ i $y=-2$ C. $x=2$ i $y=3$ D. $x=3$ i $y=2$

3

Zadanie (1 pkt)

Wyrażenie $x(x-1)(x+1)$ jest równe

- A. $(x-1)^3$ B. x^3-1 C. x^3-x D. x^3

4

Zadanie (1 pkt)

Wyrażenie $27x^3+y^3$ jest równe iloczynowi

- A. $(3x+y)(9x^2-3xy+y^2)$
 B. $(3x+y)(9x^2+3xy+y^2)$
 C. $(3x-y)(9x^2+3xy+y^2)$
 D. $(3x-y)(9x^2-3xy+y^2)$

5

Zadanie (1 pkt)

Równanie $(x-2)^2=25$ ma:

- A. jedno rozwiązanie
 B. dwa rozwiązania
 C. nie ma rozwiązań
 D. cztery rozwiązania

6

Mniejszą z dwóch liczb spełniających równanie $x^2+5x+6=0$ jest

- A. -6 B. -3 C. -2 D. -1

7

Zadanie (1 pkt)

Liczby x_1 i x_2 są pierwiastkami równania $x^2+10x-24=0$ i $x_1 < x_2$. Oblicz $2x_1+x_2$.

- A. -22 B. -17 C. 8 D. 13

8

Zadanie (1 pkt)

Zbiorem rozwiązań nierówności $(x-2)(x+5) \geq 0$ jest

- A. $(-\infty, -5) \cup \langle -2, +\infty)$
 B. $(-\infty, -5) \cup \langle 2, +\infty)$
 C. $(-\infty, -2) \cup \langle 5, +\infty)$
 D. $(-\infty, 2) \cup \langle 5, +\infty)$

9

Zadanie (1 pkt)

Zbiorem rozwiązań nierówności $x(x+5) > 0$ jest

- A. $(-\infty, 0) \cup (5, +\infty)$
 B. $(-\infty, -5) \cup (0, +\infty)$
 C. $(-\infty, -5) \cup (5, +\infty)$
 D. $(-5, +\infty)$

10

Zadanie (1 pkt)

Zbiorem rozwiązań nierówności $(x-2)(x+3) \geq 0$ jest

- A. $\langle -2, 3)$
 B. $\langle -3, 2)$
 C. $(-\infty, -3) \cup \langle 2, +\infty)$
 D. $(-\infty, -2) \cup \langle 3, +\infty)$

11

Zbiorem rozwiązań nierówności $x^2 \geq 5$ jest

- A. $(-\infty, -\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}, +\infty)$ B. $(-\infty, -\sqrt{5}) \cup \langle \sqrt{5}, +\infty)$ C. $\langle \sqrt{5}, +\infty)$ D. $\langle 5, +\infty)$

Zadanie (1 pkt)12 Zbiorem rozwiązań nierówności $x^2 \geq 9$ jest

- A. $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$ B. $\langle -3, 3 \rangle$ C. $\langle -3, +\infty \rangle$ D. $\langle 3, +\infty \rangle$

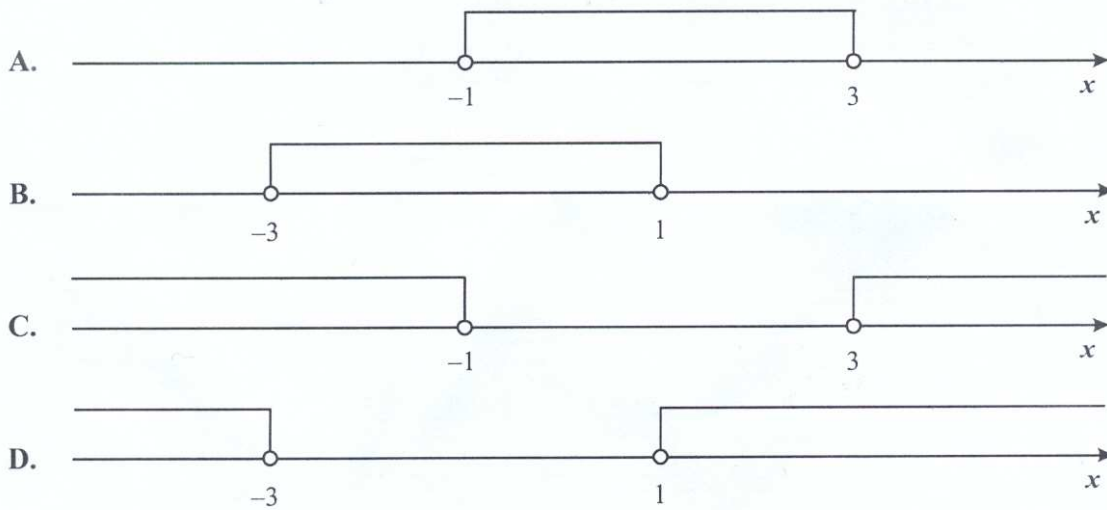
13 Zbiorem rozwiązań nierówności $x^2 > 4x$ jest

- A. $(-\infty, -4) \cup (0, +\infty)$
 B. $(4, \infty)$
 C. $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$
 D. $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$

14

Zbiorem rozwiązań nierówności $x^2 - 6 \leq 0$ jest

- A. $x \in \langle -3, 3 \rangle$
 B. $x \in (-\infty, -\sqrt{6}) \cup (\sqrt{6}, \infty)$
 C. $x \in \langle -\sqrt{6}, \sqrt{6} \rangle$
 D. $x \in (-6, 6)$

Zadanie (1 pkt)15 Zbiór rozwiązań nierówności $(x+1)(x-3) > 0$ przedstawiony jest na rysunku16 Rozwiązaniem nierówności $\frac{x-3}{4} > 2x+1$ jest

- A. $x \in (-\infty, -1)$ B. $x \in (-1, \infty)$ C. $x \in (-\infty, -4)$ D. $x \in (-4, \infty)$

Zadanie (1 pkt)17 Rozwiązaniem równania $\frac{3x-1}{7x+1} = \frac{2}{5}$ jest

- A. 1 B. $\frac{7}{3}$ C. $\frac{4}{7}$ D. 7

Zadanie (1 pkt)18 Do zbioru rozwiązań nierówności $(x-2)(x+3) < 0$ należy liczba

- A. 9 B. 7 C. 4 D. 1

Zadanie (1 pkt)19 Liczba rozwiązań równania $\frac{x+3}{(5-x)(x+2)} = 0$ jest równa

- A. 3 B. 2 C. 1 D. 0

Zadanie (1 pkt)20 Wskaż przedział, który jest zbiorem rozwiązań nierówności $\frac{x}{4} + \frac{1}{6} < \frac{x}{3}$.

- A. $(-\infty, -2)$ B. $(-\infty, 2)$ C. $(-2, +\infty)$ D. $(2, +\infty)$

21) Zadanie (1 pkt)
Równanie $\frac{x^2 - 4}{(x-4)(x+4)} = 0$

- A. nie ma rozwiązań.
- B. ma dokładnie jedno rozwiązanie.
- C. ma dokładnie dwa rozwiązania.
- D. ma dokładnie cztery rozwiązania.

22) Równanie $\frac{2x+1}{x} = 3x$

- A. ma dwa rozwiązania: $x = -\frac{1}{3}, x = 1$.
- B. ma dwa rozwiązania: $x = \frac{1}{3}, x = 1$.
- C. nie ma żadnego rozwiązania.
- D. ma tylko jedno rozwiązanie: $x = 1$.

23) Zadanie (1 pkt)

Rozwiązaniem równania $\frac{x-5}{x+3} = \frac{2}{3}$ jest liczba

- A. 21
- B. 7
- C. $\frac{17}{3}$
- D. 0

24) Rozwiązaniem równania $\frac{x-3}{2-x} = \frac{1}{2}$ jest liczba

- A. $-\frac{4}{3}$
- B. $-\frac{3}{4}$
- C. $\frac{3}{8}$
- D. $\frac{8}{3}$

25) Ile rozwiązań rzeczywistych ma równanie $5x^4 - 13 = 0$?

- A. 1
- B. 2
- C. 3
- D. 4

26) Zadanie (1 pkt)

Wskaż liczbę rozwiązań równania $\frac{11-x}{x^2-11} = 0$.

- A. 0
- B. 1
- C. 2
- D. 3

27) Zadanie (2 pkt)

Wyrażenie $\frac{3}{x-3} - \frac{x}{x+1}$ zapisz w postaci ilorazu dwóch wielomianów.

28) Zadanie (2 pkt)

Rozwiąż układ równań $\begin{cases} x+3y=5 \\ 2x-y=3 \end{cases}$

29) Zadanie (2 pkt)

Rozwiąż równanie $\frac{2-3x}{1-2x} = -\frac{1}{2}$

30)

Rozwiąż równanie $\frac{2x-4}{x+3} = \frac{1}{3}$

31)

Rozwiąż nierówność $x^2 - x - 2 \leq 0$.

37) Zadanie (2 pkt)

Rozwiąż równanie $x^3 - 7x^2 - 4x + 28 = 0$.

32) Zadanie (2 pkt)

Rozwiąż nierówność $x^2 + 6x - 7 \leq 0$.

38) Zadanie (2 pkt)

Rozwiąż równanie $2x^3 - x^2 - 6x + 3 = 0$.

33) Zadanie (2 pkt)

Rozwiąż nierówność $x^2 - 3x + 2 \leq 0$.

39) Zadanie (2 pkt)

Rozwiąż równanie $x^3 - 7x^2 + 2x - 14 = 0$.

34) Zadanie (2 pkt)

Rozwiąż nierówność $x^2 + 11x + 30 \leq 0$.

40) Zadanie (2 pkt)

Rozwiąż równanie $x^3 - 3x^2 + 2x - 6 = 0$.

35) Zadanie (2 pkt)

Rozwiąż nierówność $3x^2 > 8x + 3$.

41) Zadanie (2 pkt)

Rozwiąż równanie $x^3 + 2x^2 - 5x - 10 = 0$.

36) Zadanie (2 pkt)

Rozwiąż nierówność $x^2 - 14x + 24 > 0$.

42) Zadanie (2 pkt)

Rozwiąż równanie $x^3 - 12x^2 + x - 12 = 0$.

43) **Zadanie** (2 pkt)
Rozwiąż równanie $2x^3 - 18x = 0$.

44) **Zadanie**
Rozwiąż równanie $x^3 - 4x^2 - 3x + 12 = 0$.

45) **Zadanie**
Udowodnij, że jeśli

a) x, y są liczbami rzeczywistymi, to $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

b) x, y, z są liczbami rzeczywistymi takimi, że $x + y + z = 1$, to $x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{1}{3}$.

46) **Zadanie** (2 pkt)

Uzasadnij, że jeśli $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2$, to $ad = bc$.

47) **Zadanie** (2 pkt)

Wykaż, że jeżeli $a > 0$ i $b > 0$ oraz $\sqrt{a^2 + b} = \sqrt{a + b^2}$, to $a = b$ lub $a + b = 1$.

48) **Zadanie** (2 pkt)

Udowodnij, że jeśli k i n są liczbami naturalnymi oraz $1 \leq k \leq n$, to $k(n - k + 1) \geq n$.

49) **Zadanie** (2 pkt)

Wykaż, że jeśli $a > 0$, to $\frac{a^2 + 1}{a + 1} \geq \frac{a + 1}{2}$.

50) **Zadanie** (5 pkt)

Uczeń przeczytał książkę liczącą 480 stron, przy czym każdego dnia czytał jednakową liczbę stron. Gdyby czytał każdego dnia o 8 stron więcej, to przeczytałby tę książkę o 3 dni wcześniej. Oblicz, ile dni uczeń czytał tę książkę.

Zadanie (5 pkt)

Za wynajęcie autobusu na wycieczkę uczniowie klasy IA mieli zapłacić 1800 złotych. Ponieważ 4 uczniów zrezygnowało z tej wycieczki, każdy z pozostałych uczniów zapłacił o 15 zł więcej. Oblicz, ilu uczniów jest w klasie IA.

52) W dwóch hotelach wybudowano prostokątne baseny. Basen w pierwszym hotelu ma powierzchnię 240 m^2 . Basen w drugim hotelu ma powierzchnię 350 m^2 oraz jest o 5 m dłuższy i 2 m szerszy niż w pierwszym hotelu. Oblicz, jakie wymiary mogą mieć baseny w obu hotelach. Podaj wszystkie możliwe odpowiedzi.

5p.

53) **Zadanie**

Z miejscowości A i B oddalonych od siebie o 182 km wyjeżdżają naprzeciw siebie dwaj rowerzyści. Rowerzysta jadący z miejscowości B do miejscowości A jedzie ze średnią prędkością mniejszą od 25 km/h. Rowerzysta jadący z miejscowości A do miejscowości B wyjeżdża o 1 godzinę wcześniej i jedzie ze średnią prędkością o 7 km/h większą od średniej prędkości drugiego rowerzysty. Rowerzyści spotkali się w takim miejscu, że rowerzysta jadący z miejscowości A przebył do tego miejsca $\frac{9}{13}$ całej drogi z A do B . Z jakimi średnimi prędkościami jechali obaj rowerzyści?

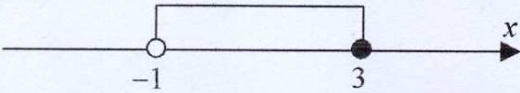
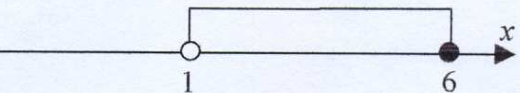
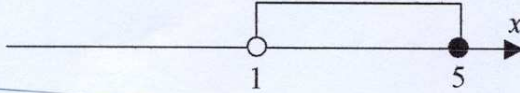
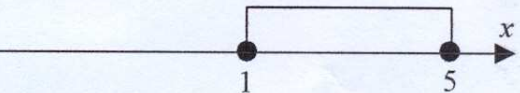
54) Droga z miasta A do miasta B ma długość 474 km. Samochód jadący z miasta A do miasta B wyrusza godzinę później niż samochód z miasta B do miasta A . Samochody te spotykają się w odległości 300 km od miasta B . Średnia prędkość samochodu, który wyjechał z miasta A , liczona od chwili wyjazdu z A do momentu spotkania, była o 17 km/h mniejsza od średniej prędkości drugiego samochodu liczonej od chwili wyjazdu z B do chwili spotkania. Oblicz średnią prędkość każdego samochodu do chwili spotkania.

55) Do zbiornika o pojemności 700 m^3 można doprowadzić wodę dwiema rurami. W ciągu jednej godziny pierwsza rura dostarcza do zbiornika o 5 m^3 wody więcej niż druga rura. Czas napełniania zbiornika tylko pierwszą rurą jest o 16 godzin krótszy od czasu napełniania tego zbiornika tylko drugą rurą. Oblicz, w ciągu ilu godzin pusty zbiornik zostanie napełniony, jeśli woda będzie doprowadzana przez obie rury jednocześnie.

(6p)

56) **Zadanie** (5 pkt)

Kolarz przejechał trasę długości 60 km. Gdyby jechał ze średnią prędkością większą o 1 km/h, to przejechałby tę trasę w czasie o 6 minut krótszym. Oblicz, z jaką średnią prędkością jechał ten kolarz.

- 57) Rozwiązaniem równania $3(2-3x) = x-4$ jest:
 A. $x=1$ B. $x=2$ C. $x=3$ D. $x=4$
- 58) Rozwiązanie równania $x(x+3)-49 = x(x-4)$ należy do przedziału
 A. $(-\infty, 3)$ B. $(10, +\infty)$ C. $(-5, -1)$ D. $(2, +\infty)$
- 59) Równanie $x^2 + 6x + 9 = -1$
 A. ma trzy pierwiastki B. ma dwa pierwiastki C. ma jeden pierwiastek D. nie ma pierwiastków
- 60) Najmniejszą liczbą całkowitą należącą do zbioru rozwiązań nierówności $\frac{3}{8} + \frac{x}{6} < \frac{5x}{12}$ jest
 A. 1 B. 2 C. -1 D. -2
- 61) Wskaż, który zbiór przedstawiony na osi liczbowej jest zbiorem liczb spełniających jednocześnie następujące nierówności: $3(x-1)(x-5) \leq 0$ i $x > 1$.
- A.  B. 
- C.  D. 
- 62) Układ równań $\begin{cases} 4x+2y=10 \\ 6x+ay=15 \end{cases}$ ma nieskończenie wiele rozwiązań, jeśli
 A. $a=-1$ B. $a=0$ C. $a=2$ D. $a=3$
- 63) Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} x+3y=5 \\ 2x-y=3 \end{cases}$ jest
 A. $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$
- 64) Rozwiązaniem równania $\frac{x-6}{2x-4} = \frac{2}{3}$ jest liczba
 A. 8 B. 10 C. $\frac{1}{2}$ D. -10
- 65) Zbiorem rozwiązań nierówności $(x-1)(x+2) > 0$ jest zbiór
 A. $(-\infty, -2) \cup (1, \infty)$ B. $(-2, 1)$ C. $(-\infty, -1) \cup (2, \infty)$ D. $(-1, 2)$
- 66) Wyrażenie $5a^2 - 10ab + 15a$ jest równe iloczynowi
 A. $5a^2(1-10b+3)$ B. $5a(a-2b+3)$ C. $5a(a-10b+15)$ D. $5(a-2b+3)$
- 67) Dla pewnych liczb a i b zachodzą równości: $a^2 - b^2 = 200$ i $a+b=8$. Dla tych liczb a i b wartość wyrażenia $a-b$ jest równa
 A. 25 B. 16 C. 10 D. 2
- 68) Rozwiąż nierówność $3x^2 - 10x + 3 \leq 0$.
 2 pkt
- 69) Rozwiąż nierówność $x^2 - 3x + 2 < 0$.
 2 pkt
- 70) Rozwiąż równanie $x^3 + 2x^2 - 6x - 12 = 0$.
 2 pkt


71 2 pkt
Iloczyn pewnej liczby i liczby o 1 od niej większej jest równy 6. Oblicz sumę tych liczb.

72 2 pkt
Wykaż, że jeżeli $k > 0$, to równanie $x^2 + k(x - 1) = 0$ ma dwa pierwiastki.

73 2 p.
Uzasadnij, że jeżeli $a + b = 1$ i $a^2 + b^2 = 7$, to $a^4 + b^4 = 31$.

74 5 pkt
Pewien turysta pokonał trasę 112 km, przechodząc każdego dnia tę samą liczbę kilometrów. Gdyby mógł przeznaczyć na tę wędrowkę o 3 dni więcej, to w ciągu każdego dnia mógłby przechodzić o 12 km mniej. Oblicz, ile kilometrów dziennie przechodził ten turysta. 5

75 5 p.
Dwie szkoły mają prostokątne boiska. Przekątna każdego boiska jest równa 65 m. Boisko w drugiej szkole ma długość o 4 m większą niż boisko w pierwszej szkole, ale szerokość o 8 m mniejszą. Oblicz długość i szerokość każdego z tych boisk.

76 5 p.
Zadanie (6 pkt) 
Dwa pociągi towarowe wyjechały z miast A i B oddalonych od siebie o 540 km. Pociąg jadący z miasta A do miasta B wyjechał o godzinę wcześniej niż pociąg jadący z miasta B do miasta A i jechał z prędkością o 9 km/h mniejszą. Pociągi te minęły się w połowie drogi. Oblicz, z jakimi prędkościami jechały te pociągi.

$$(*) \left(\bar{x} - t_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}} ; \bar{x} + t_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}} \right)$$

$n=17$, musimy postawić się na rachunek, to $n-1=16$ stopni swobody.

$$1-\alpha=0,95$$

$$1-\alpha=0,9$$

$$\alpha=0,05 / :2$$

$$\alpha=0,1 / :2$$

$$\frac{\alpha}{2}=0,025$$

$\frac{\alpha}{2}=0,05 \leftarrow$ w naszym przypadku

w tabelach w wierszu odpowiadającym 16 stopniom

swobody, w kolumnie odpowiadającej naszej poda pod pro-
"ogonem" naszej gęstości równej 0,05 (czyli $\frac{\alpha}{2}$) znajdziemy

$$t_{0,05}=1,746.$$

Należy teraz tylko obliczyć S i podstawić do wzoru.

$$\bar{x}=3,82$$

$$S^2=18,4$$

$$S=4,29$$

$$t_{\alpha/2}=1,746$$

$$n=17$$

zad 9) Dwieććt ufności dla wariancji w populacji

σ^2 , gdy rozkład w populacji jest normalny i wódczas

wódczas:

$$\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}} ; \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}} \right]$$

gdzie $\chi^2_{\alpha/2}$ jest wartością zmiennej w rozkładzie

chi - kwadrat o $n-1$ stopniach swobody.

$$n=5$$

$$\bar{x} = 8,904$$

$$S = 0,47$$

$$S^2 = 0,22$$

$$n-1=4 - \text{stopnie swobody.}$$

wyliczone w Excelu

$$1-\alpha = 0,98$$

$$\alpha = 0,02$$

$$\frac{\alpha}{2} = 0,01$$

$$1 - \frac{\alpha}{2} = 0,99$$

$$\chi^2_{0,01} = 13,27$$

$$\chi^2_{0,99} = 0,297$$

odczytane z tabelic

$$\left[\frac{4 \cdot 0,22}{13,27} ; \frac{4 \cdot 0,22}{0,297} \right] - \text{przedzia\u0142 dla}$$

rozrzutu

$$\left[\sqrt{\frac{4 \cdot 0,22}{13,27}} ; \sqrt{\frac{4 \cdot 0,22}{0,297}} \right] - \text{przedzia\u0142 dla}$$

odchy\u0142enia